UNIVERSITE PAUL SABATIER **Année Universitaire 2010 -2011**
L1 PCP **Lundi 4 avril 2011**

Contrôle continu de mécanique

L'usage des calculatrices, des documents personnels et téléphones portables, est interdit.

(Durée : 30 minutes)

NOM :	**Prénom :**	**Groupe :**	***Note (/20) :***

I – Questions de cours : Mouvement dans un champ de forces centrales

Les notations utilisées seront celles du cours

a) Donner la définition d'une force centrale.

La force $\vec{F}(\vec{r})$ est dite centrale si sa direction passe à tout instant par le point C fixe ds R (C = centre de force) et si son intensité ne dépend que de la distance de C à M = $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$, avec $\vec{CM} = r\vec{e}_r$

b) Quelles sont les caractéristiques du mouvement d'un point matériel *M* soumis à une force centrale ? Justifier.

$$\left[\frac{d\vec{L}_C(M/R)}{dt}\right]_R \underset{TMC}{=} \sum \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{F}_{ext}(M/R)) = \vec{CM} \times \vec{F}(\vec{r}) = r\vec{e}_r \times f(r)\vec{e}_r = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_C(M/R) = \vec{cte}$$

$\vec{L}_C(M/R) = \vec{CM} \times m\vec{v}(M/R)$ = garde une direction cte $\vec{e}_z$

$\Rightarrow \vec{CM}$ et $\vec{v}$ $\in$ à tt t au m̂ plan

$\Rightarrow$ le mvt est un mvt plan, dans le plan $\perp \vec{e}_z$ et contenant C

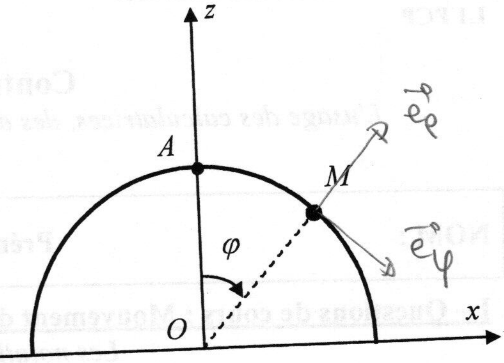
c) Donner la définition d'un état lié.

Un état lié est un état tel que le centre de force C et le point matériel M sont tjs en interaction = M est tjs à distance finie de C.

d) Donner la définition d'un état de diffusion.

$\forall$ les conditions initiales, le centre de force C et le point matériel M finissent, pour " t suffisamment grand" par ne plus interagir, et donc par ne plus être liés.

II – Exercice



Sur un demi-cylindre fixe, de centre O et de rayon R, une bille M, assimilable à une masse ponctuelle m, est lâchée, sans vitesse initiale, du point A, situé sur la verticale ascendante Oz du référentiel galiléen $\mathscr{R}\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$. Le mouvement de M s'effectue, sans frottement, dans le plan perpendiculaire à l'axe Oy de révolution du demi-cylindre.

On repère la position de M par l'angle $\varphi = \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$.

a) Réaliser le bilan des forces s'exerçant sur M : justifier, puis les exprimer dans la base cylindrique $\left(\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{e_y}\right)$ associée à M.

$\sum \vec{F}_{ext}(M/R) = \vec{P} + \vec{R}$

Mvt sans frottement $\Rightarrow \vec{R} \perp$ trajectoire $\Rightarrow \vec{R} = N\,\vec{e_\rho}$

$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z} = -mg\left(\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi}\right)$

b) Enoncer le théorème du moment cinétique.

$$\left[\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt}\right]_R = \sum \vec{\mathcal{M}}_O\left(\vec{F}_{ext}(M/R)\right)$$

c) En déduire l'équation du mouvement.

$\vec{L}_O(M/R) = \overrightarrow{OM} \times m\vec{v}(M) = R\vec{e_\rho} \times mR\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} = mR^2\dot{\varphi}\,\vec{e_y}$

$\sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}) = \overrightarrow{OM} \times \vec{P} + \underbrace{\overrightarrow{OM} \times \vec{R}}_{=\vec{0}} = R\vec{e_\rho} \times mg\sin\varphi\,\vec{e_\varphi} = mgR\sin\varphi\,\vec{e_y}$

$\Rightarrow mR^2\ddot{\varphi} = mgR\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} - \frac{g}{R}\sin\varphi = 0$

d) Déterminer, dans le mouvement commençant (c'est-à-dire pour $\varphi \ll 1$ rad), les variations de φ en fonction du temps t.

$\varphi \ll 1$ rad $\Rightarrow \sin\varphi \simeq \varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} - \frac{g}{R}\varphi = 0$

$\Omega^2 = \frac{g}{R} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} - \Omega^2\varphi = 0$

Donc $\varphi(t) = A\,\mathrm{ch}\,\Omega t + B\,\mathrm{sh}\,\Omega t$

$\dot{\varphi}(t=0) = 0 = \Omega\left[A\,\mathrm{sh}\,\Omega t + B\,\mathrm{ch}\,\Omega t\right]_{t=0} = \Omega B \quad \Rightarrow B = 0$

$\Rightarrow \varphi(t) = A\,\mathrm{ch}\,\Omega t$

Remarque : il aurait fallut prendre $\dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0 \Rightarrow B = \dot{\varphi}_0/\Omega$

$\varphi(t=0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad \Rightarrow \varphi(t) = \frac{\dot{\varphi}_0}{\Omega}\,\mathrm{sh}\,\Omega t$